Neue Beiträge

zur

Theorie des Pascal'schen Sechsecks.

Von

Dr. Otto Dziobek.

BERLIN
FERD. DÜMMLERS VERLAGSBUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN
1882.

Neue Beiträge

zur

Theorie des Pascal'schen Sechsecks.

Von

Dr. Otto Dziobek.

BERLIN

FERD. DÜMMLERS VERLAGSBUCHHANDLUNG

HARRWITZ UND GOSSMANN

1882.

Neue Beiträge zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks.

Die Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck sind um Wesentliches gefördert worden durch Herrn Giuseppe Veronese in seiner in den „Atti della Roma Academia 1878" erschienenen Abhandlung: „Nuovi teoremi sull' Hexagrammum Mysticum." Derselbe zeigt, dass ausser dem System der 60 Pascal'schen Linien und 60 Kirkmann'schen Punkte noch unendlich viele Systeme von 60 Linien und Punkten existiren, die, wenn auch nicht alle, so doch die meisten Eigenschaften mit dem ersten System gemeinsam haben. Von diesen Systemen folgt immer das Eine aus dem vorhergehenden.

In der folgenden Abhandlung wird gezeigt werden, dass diese Systeme von Veronese einzelne Glieder einer continuirlichen Reihenfolge von Systemen sind. Ich werde zunächst eine allgemeinere Figur betrachten, von der die aus 6 auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten entstehende ein specieller Fall ist. Die von Hesse in Crelle's Journal, Band 68 aufgestellte Reciprocität ist für dieselbe eine vollständige. Durch Einführung gewisser Bedingungen nähert sich die Figur bedeutend obiger speciellen, ohne dass der Reciprocität Abbruch geschieht. In dieser Figur spielen gewisse 15 Linien dieselbe Rolle, wie in der Pascal'schen Figur die 15 Verbindungslinien der 6 Punkte eines Kegelschnitts, d. h. man kann diese 15 Linien genau so wie die 15 Verbindungslinien zu je 6 zu 60 Pascalschen Sechsecken combiniren, deren 60 Pascal'sche Linien zu Figuren Veranlassung geben, die mit den aus den Steiner-Plücker und Cayley-Salmon'schen gebildeten die wesentlichsten Eigenschaften gemeinsam haben. Da die Reciprocität eine vollständige ist, so treten natürlich auch 15 Punkte auf, die man zu je 6 zu 60 Brianchonschen Sechsecken combiniren kann. Durch abermalige Einführung

specieller Bedingungen gehen obige 15 Linien in die 15 Verbindungslinien von 6 Punkten eines Kegelschnitts über, während die 15 Punkte nicht in die 15 Durchschnittspunkte von 6 Tangenten eines Kegelschnitts übergehen. Durch diese Bedingungen wird also die Reciprocität gestört.

Um die Einführung neuer Namen zu vermeiden, ist es nothwendig, die Begriffe der Pascal'schen, Plücker'schen, Salmon-schen Linien, sowie der Kirkmann'schen, Cayley'schen und Steiner-schen Punkte zu verallgemeinern.

Die reciproken entsprechenden Punkte und Linien sollen Brianchon'sche, Plücker'sche, Salmon'sche Punkte, Kirkmann'sche, Cayley'sche und Steiner'sche Linien heissen.

§ I.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 irgend 5 lineare Ausdrücke in den Coordinaten x, y, z eines Punktes in Bezug auf irgend ein Fundamentaldreieck und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ irgend 5 Constanten.

Das System

$$1) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5 \end{matrix} \right\|$$

liefert, wenn man je zwei seiner Vertikalreihen zu einer Determinante vereinigt, 10 Determinanten, welche = 0 gesetzt die Gleichungen von 10 geraden Linien bilden, die mit [1 2], [1 3] etc. bezeichnet werden können. Die drei Linien [1 2], [2 3], [3 1] schneiden sich in einem Punkte (1 2 3), da zwischen ihren Gleichungen die Identität

$$[12]\alpha_3 + [23]\alpha_1 + [31]\alpha_2 \equiv 0$$

stattfindet.

Solcher Punkte erhält man ebenfalls 10. Auf jeder Geraden [12] liegen drei Punkte (123), (124), (125) und durch jeden Punkt (123) gehen drei Gerade [12], [23], [31]. Man kann jeder Geraden denjenigen Punkt zuordnen, welcher diejenigen Indices enthält, die die Gerade nicht hat, z. B. der Linie [1 2] den Punkt (3 4 5). Dann sind die 10 Linien die Polaren der entsprechenden 10 Punkte in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt. Man kann dies folgendermassen beweisen.

Da die 5 linearen Functionen x ganz von einander unabhängig sind, so genügen sie zwei von einander unabhängigen Gleichungen von der Form

$$2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 \equiv 0.$$

Sollen aber die Coefficienten a noch der Bedingung

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 \alpha_4 + a_5 \alpha_5 = 0 \qquad 3)$$

genügen, so sind sie bis auf einen constanten Factor bestimmt.

Alsdann ist die Gleichung des fraglichen Kegelschnitts

$$x_1^2 \frac{a_1}{\alpha_1} + x_2^2 \frac{a_2}{\alpha_2} + x_3^2 \frac{a_3}{\alpha_3} + x_4^2 \frac{a_4}{\alpha_4} + x_5^2 \frac{a_5}{\alpha_5} = 0. \qquad 4)$$

Denn bezeichnet man mit x_1', x_2', x_3' . . das, was aus x_1, x_2 . . . wird, wenn man die Coordinaten eines bestimmten Punktes einsetzt, so wird die Gleichung der Polare dieses Punktes in Bezug auf 4)

$$x_1 x'_1 \frac{a_1}{\alpha_1} + x_2 x'_2 \frac{a_2}{\alpha_2} + \ldots = 0.$$

Wählt man für diesen Punkt den Punkt (1 2 3), so ist

$$x'_1 = \alpha_1, \; x'_2 = \alpha_2, \; x'_3 = \alpha_3.$$

Aus 2) findet man mit Hilfe von 3)

$$x'_4 = \alpha_4 + \lambda a_5$$
$$x'_5 = \alpha_5 - \lambda a_4.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Polare ein, so erhält man in der That mit Hilfe von 2)

$$x_4 \left((\alpha_4 + \lambda a_5) \frac{a_4}{\alpha_4} - a_4 \right) + x_5 \left((\alpha_5 - \lambda a_4) \frac{a_5}{\alpha_5} - a_5 \right) = 0,$$

oder mit Weglassung des Factors $\frac{\lambda a_4 . a_5}{\alpha_4 . \alpha_5}$

$$x_4 \alpha_5 - \alpha_4 x_5 = 0$$

die Gleichung von [4 5].

Ein solches System von 10 Linien und 10 Punkten möge ein System π heissen. Jedes solches System ist also in Bezug auf einen Kegelschnitt sich selbst polar.

§ II.

Fügt man zu den 5 Functionen x und Constanten α noch die Function x_6 und die Constante α_6, so erhält man 15 Linien [12] etc. und 20 Punkte (123) etc. Diese 15 Linien und 20 Punkte nennt Hesse eine Steiner'sche Figur, weil die 20 Steiner'schen Punkte und 15 Plücker'schen Linien eines Pascal'schen Sechsecks eine solche (allerdings specielleren Charakters) bilden. Die 20 Punkte kann man in 10 Paare ordnen, so dass z. B. (1 2 3) und (4 5 6) ein Paar bilden. Dann sind die 10 Punktepaare conjugirte Punktepaare in Bezug auf eine ganze Schaar von Kegelschnitten.

Die 6 Functionen x genügen drei von einander unabhängigen Gleichungen

1) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots = 0.$$

Sollen aber die a noch der Bedingung

2) $$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots = 0$$

genügen, so erhält man nur zwei Gleichungen von der Form 1).

Es sei

3) $$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots = 0$$

die zweite dieser Gleichungen und daher auch

4) $$b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots = 0.$$

Dann sind die 10 Punktepaare conjugirte Pole in Bezug auf die beiden Kegelschnitte

5) $$\frac{a_1}{\alpha_1} x_1^2 + \frac{a_2}{\alpha_2} x_2^2 + \dots = 0$$

6) $$\frac{b_1}{\alpha_1} x_1^2 + \frac{b_2}{\alpha_2} x_2^2 + \dots = 0.$$

und also auch in Bezug auf die ganze, aus diesen entspringende Schaar.

In der That, die Gleichung der Polare des Punktes (1 2 3) in Bezug auf den Kegelschnitt 5), für welchen

$$x'_1 = \alpha_1,\ x'_2 = \alpha_2,\ x'_3 = \alpha_3,$$

erhält durch Benutzung von 1) die Form:

$$\frac{a_4}{\alpha_4}(x'_4 - \alpha_4) + \frac{a_5}{\alpha_5}(x'_5 - \alpha_5) + \frac{a_6}{\alpha_6}(x'_6 - \alpha_6) = 0.$$

Die Gleichungen 1) und 3) werden in diesem Falle mit Hilfe von 2) und 4)

$$a_4(x'_4 - \alpha_4) + a_5(x'_5 - \alpha_5) + a_6(x'_6 - \alpha_6) = 0$$
$$b_4(x'_4 - \alpha_4) + b_5(x'_5 - \alpha_5) + b_6(x'_6 - \alpha_6) = 0.$$

Daher geht die Gleichung der Polare über in:

$$\begin{vmatrix} \frac{a_4}{\alpha_4} x_4, & \frac{a_5}{\alpha_5} x_5, & \frac{a_6}{\alpha_6} x_6 \\ a_4, & a_5, & a_6 \\ b_4, & b_5, & b_6 \end{vmatrix} = 0,$$

welche für $x_4 = \alpha_4$, $x_5 = \alpha_5$, $x_6 = \alpha_6$, d. h. für die Coordinaten des Punktes (4 5 6) erfüllt ist. Dasselbe gilt natürlich auch für den Kegelschnitt 6).

Eine Steiner'sche Figur möge mit ϱ bezeichnet werden. Eine reciproke Figur τ zur Steiner'schen erhält man, wenn man in obigen Betrachtungen Liniencoordinaten zu Grunde legt.

§ III.

Es sei gegeben das System

$$\left\|\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6, & \alpha_7 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4, & \beta_5, & \beta_6, & \beta_7 \end{matrix}\right\| \qquad 1)$$

wo die x wieder lineare Functionen und die α und β gegebene Constante bezeichnen. Je drei Vertikalreihen zu einer Determinante zusammengestellt ergeben = 0 gesetzt die Gleichung einer Linie. Solcher Linien [1 2 3] etc. giebt es 35.

Die vier Linien [1 2 3], [2 3 4], [3 4 1], [4 1 2] gehen durch einen Punkt, denn zwischen ihren Gleichungen finden die beiden Relationen statt:

$$[123]\alpha_4 - [234]\alpha_1 + [341]\alpha_2 - [412]\alpha_3 \equiv 0$$
$$[123]\beta_4 - [234]\beta_1 + [341\beta_2 - [412]\beta_3 \equiv 0.$$

Solcher Punkte giebt es ebenfalls 35. Mann kann dieselben den 35 Linien zuordnen, so z. B. den Punkt (1 2 3 4) der Linie [5 6 7]. Im Allgemeinen wird diese Zuordnung keine polare sein, indessen sieht man doch, dass die Figur in gewissem Sinne sich selbst reciprok ist, denn auf jeder der 35 Linien liegen 4 Punkte und durch jeden der 35 Punkte gehen 4 Linien.

Es wird diese Reciprocität bei der Einführung von Liniencoordinaten, die wir jetzt vornehmen wollen, noch stärker hervortreten.

Zwischen den x finden vier von einander unabhängige Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots. = 0 \qquad 2)$$

statt.

Sollen die a aber noch den Gleichungen

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots. = 0 \qquad 3)$$
$$a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \ldots. = 0 \qquad 4)$$

genügen, so ergeben sich nur zwei solche Gleichungen. Die zweite sei:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots. = 0 \qquad 5)$$

und also auch:

$$b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \ldots. = 0 \qquad 6)$$
$$b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \ldots. = 0 \qquad 7)$$

Es seien jetzt $u_1, u_2, u_3 \ldots u_7$ sieben lineare Functionen der drei Liniencoordinaten u, v, w. Es sollen dieselben so bestimmt werden, dass

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots. \equiv ux + vy + wz \qquad 8)$$
$$u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + \ldots. \equiv 0 \qquad 9)$$
$$u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + \ldots. \equiv 0 \qquad 10)$$

Es kann diesen Gleichungen immer und zwar auf unendlich viele Arten genügt werden, da die u einundzwanzig disponible Constanten enthalten, während die erste Gleichung in neun und die beiden anderen in je drei Gleichungen zerfallen. Für unseren Zweck ist es ganz gleichgiltig, welche weitere Bedingungen man noch diesen einundzwanzig Constanten auferlegt.

Es ist klar, dass man die Gleichung irgend eines Punktes in Liniencoordinaten erhält, wenn man in x_1, x_2 . . die Coordinaten desselben einsetzt und die linke Seite von 8) = 0 setzt. Es sei dieser Punkt der Punkt (1 2 3 4). Für denselben ist:

$$x_1 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1$$
$$x_2 = \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2$$
$$x_3 = \lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3$$
$$x_4 = \lambda_1 \alpha_4 + \lambda_2 \beta_4$$

Die Gleichungen 2) und 5) werden dann mit Hilfe von 3), 4), 6), 7)

$$(x_5 - \lambda_1 \alpha_5 - \lambda_2 \beta_5) a_5 + (x_6 - \lambda_1 \alpha_6 - \lambda_2 \beta_6) a_6 + (x_7 - \lambda_1 \alpha_7 - \lambda_2 \beta_7) a_7 = 0$$
$$(x_5 - \lambda_1 \alpha_5 - \lambda_2 \beta_5) b_5 + (x_6 - \lambda_1 \alpha_6 - \lambda_2 \beta_6) b_6 + (x_7 - \lambda_1 \alpha_7 - \lambda_2 \beta_7) b_7 = 0.$$

Daraus ergiebt sich:

$$x_5 = \lambda_1 \alpha_5 + \lambda_2 \beta_5 + \lambda_3 (a_6 b_7 - b_6 a_7)$$
$$x_6 = \lambda_1 \alpha_6 + \lambda_2 \beta_6 + \lambda_3 (a_7 b_5 - b_7 a_5)$$
$$x_7 = \lambda_1 \alpha_7 + \lambda_2 \beta_7 + \lambda_3 (a_5 b_6 - b_5 a_6)$$

Setzt man diese Werthe für x in 8) ein, so ergiebt sich mit Weglassung des Factors λ_3 unter Berücksichtigung von 9) und 10) für den Punkt (1 2 3 4) die Gleichung

$$\begin{vmatrix} u_5, & u_6, & u_7 \\ a_5, & a_6, & a_7 \\ b_5, & b_6, & b_7 \end{vmatrix} = 0$$

Daraus folgt, dass das System

$$11) \quad \begin{Vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6, & u_7 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, & b_7 \end{Vmatrix}$$

dasselbe ist, wie das System 1), nur dass im ersten System Punkt, im zweiten Liniencoordinaten stehen. Zwischen den Functionen und Constanten finden die neun Relationen 2) bis 10) statt.

Ein solches System möge ein System ξ heissen. Die 15 Plücker-schen Linien und 20 Steiner'schen Punkte, sowie die 15 Cayley-schen Punkte und 20 Salmon'schen Linien bilden in ihrer Gesammtheit ein solches System ξ.

§ IV.

Die fünf ersten Vertikalreihen des Systems 1) des § III ergeben 10 Linien [1 2 3], [1 2 4] . . . . . ., welche sich in fünf Punkten (1 2 3 4), (1 2 3 5) . . . . etc. schneiden, d. h. sie sind die 10 Verbindungslinien eines Fünfecks e (1, 2, 3, 4, 5); die zu diesen 5 Punkten reciproken 5 Linien [1 6 7], [2 6 7]. . . . . bilden ein vollständiges Fünfseit s [1 2 3 4 5] und die 10 Punkte (1 2 6 7) etc. sind die 10 Ecken desselben. Die zwanzig übrigen Geraden [1 2 6], [1 3 6] . . . . . ., [1 2 7], [1 3 7] . . . . theilen sich in zwei Gruppen π (1 2 3 4 5, 6), π (1 2 3 4 5, 7). Jede der beiden Gruppen bildet eine Figur π des § I, deren Linien durch die 10 Ecken des Fünfseits s [1 2 3 4 5] gehen und deren Punkte auf den 10 Seiten des Fünfecks e (12345) liegen. Dieselben sind zwei Systeme π aus einer continuirlichen Menge, die man erhält, wenn man in π (1 2 3 4 5, 6) $\lambda_1 u_6 + \lambda_2 u_7$ statt u_6, $\lambda_1 \alpha_6 + \lambda_2 \alpha_7$ statt α_6, $\lambda_1 \beta_6 + \lambda_2 \beta_7$ statt β_6 setzt. Für $\lambda_1 = 0$ erhält man wieder das System π (1 2 3 4 5, 6), für $\lambda_2 = 0$ das System π (1 2 3 4 5, 7). Es möge allgemein das System $\pi\,(6\lambda_1, 7\lambda_2)$ heissen. Irgend zwei Systeme $\pi\,(6\lambda_1, 7\lambda_2)$, $\pi\,(6\lambda'_1, 7\lambda'_2)$ bilden mit dem Fünfseit s [12345] und dem Fünfeck e (12345) eine Figur ξ. Die Systeme $\pi\,(6\lambda_1, 7\lambda_2)$ sind dadurch charakterisirt, dass sie bestimmt sind, sobald eine ihrer 10 Linien oder einer ihrer 10 Punkte gegeben sind.

Vertauscht man die Indices 6 und 7 mit irgend zwei der Indices 1, 2 . . . 7, so erhält man auf diese Weise 21 continuirliche Reihen von Systemen π.

§ V.

Um auf die Anwendungen der Entwickelungen auf das Pascal-sche Sechseck überzugehen, ist es zweckmässig, die Symmetrie der Systeme 1) und 2) des § III in der Weise zu zerstören, dass man einen Index, z. B. 7 besonders auszeichnet. Diese Systeme, sowie die Gleichungen 2) bis 10) dieses Paragraphen bleiben unverändert, wenn man schreibt:

$$x_1 + \alpha_1 \varphi_1 (xyz) + \beta_1 \varphi_2 (xyz) \text{ statt } x_1$$
$$x_2 + \alpha_2 \varphi_1 (xyz) + \beta_2 \varphi_2 (xyz) \text{ statt } x_2$$

. . . .

. . . .

$$\alpha_1 + \lambda \beta_1 \text{ statt } \alpha_1$$
$$\alpha_2 + \lambda \beta_2 \text{ statt } \alpha_2$$

. . . .

. . . .

$$u_1 + a_1 f_1(u v w) + b_1 f_2(u v w) \text{ statt } u_1$$
$$u_2 + a_2 f_1(u v w) + b_2 f_2(u v w) \text{ statt } u_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1 + \delta b_1 \text{ statt } a_1$$
$$a_2 + \delta b_2 \text{ statt } a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

wo λ und δ zwei Constanten, φ_1 und φ_2 irgend zwei lineare Functionen von x y z, f_1 und f_2 zwei solche von u v w sind. Die Grössen λ und δ sollen so gewählt werden, dass

$$\alpha_7 + \lambda \beta_7 = 0$$
$$a_7 + \delta b_7 = 0.$$

Die Functionen φ_1 und φ_2, f_1 und f_2 so, dass

$$x_7 + \alpha_7 \varphi_1 + \beta_7 \varphi_2 \equiv 0$$
$$u_7 + a_7 f_1 + b_7 f_2 \equiv 0$$

Dann erhält das System 1) des § III die Form

$$1) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & 0 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6, & 0 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4, & \beta_5, & \beta_6, & \beta_7 \end{matrix} \right\|$$

Das System 11) erhält die Form:

$$2) \qquad \left\| \begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6, & 0 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & 0 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, & b_7 \end{matrix} \right\|$$

Die Constanten β_7 und b_7 haben gar keinen Einfluss. Soll aber die Gleichung 7) des § III bestehen bleiben, so ist ihr Produkt bestimmt. Lässt man dieselbe fallen, so kann man $\beta_7 = b_7 = 1$ wählen.

Das System 1) zerfällt dann in die beiden Systeme

$$3) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \end{matrix} \right\|$$

$$4) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4, & \beta_5, & \beta_6 \end{matrix} \right\|$$

Das System 2) zerfällt in die beiden Systeme

$$5) \qquad \left\| \begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \end{matrix} \right\|$$

$$6) \qquad \left\| \begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6 \end{matrix} \right\|$$

Zugleich ist 3) identisch mit 6) und 4) identisch mit 5).

Das System 3) bildet eine Figur ϱ, das System 4) eine Figur τ. Beide zusammen bilden eine Figur ξ. Wir werden bald die Formen 3) und 4), bald die Formen 5) und 6) anwenden, je nach Bequemlichkeit.

Zwischen den Functionen und Constanten finden die Gleichungen statt:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots \equiv ux + vy + wz \qquad 7)$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots \equiv 0 \qquad 8)$$

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots \equiv 0 \qquad 9)$$

$$u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + \dots \equiv 0 \qquad 10)$$

$$u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + \dots \equiv 0 \qquad 11)$$

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots = 0 \qquad 12)$$

$$a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots = 0 \qquad 13)$$

$$b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \dots = 0 \qquad 14)$$

Zugleich möge

$$b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \dots = k \qquad 15)$$

gesetzt werden.

§ VI.

Von den im § IV aufgestellten 21 Reihen von Figuren π sollen nur 6 betrachtet werden, nämlich die aus den Fünfecken:

e (12345), e (23456), e (34561), e (45612), e (56123), e (61234)

und den reciproken Fünfseiten hervorgehenden.

Es wird in diesem Falle

$$\pi(6\lambda_1, 7\lambda_2) = \pi(6, 7\frac{\lambda_2}{\lambda_1}) = \pi(6, 7\lambda_6)$$

wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda_6$ gesetzt wird. Da der Index 7 jetzt eine vereinzelte Rolle spielt, so kann man dies System kurz mit $\pi(6, \lambda_6)$ bezeichnen.

Die Seiten desselben erhält man, indem man in 4) statt β_6 $\beta_6 + \lambda_6$ schreibt und nur diejenigen Linien auswählt, welche die letzte Vertikalreihe enthalten. Für $\lambda_6 = 0$ geht das System π in ein im System 4) enthaltenes über; für $\lambda_6 = \infty$ dagegen in ein im System 3) enthaltenes. Das System $\pi(6, \lambda_6)$ ist in Punktcoordinaten dargestellt worden, jetzt soll es in Liniencoordinaten ausgedrückt werden.

Schreibt man in 4) § V $\beta_6 + \lambda_6$ statt β_6 und combinirt die letzte Vertikalreihe mit je zwei der drei ersten, so erhält man drei Linien von $\pi(6, \lambda_6)$, die sich in einem Punkte schneiden.

Für diesen Punkt ist

$$x_1 = p\alpha_1 + q\beta_1$$
$$x_2 = p\alpha_2 + q\beta_2$$
$$x_3 = p\alpha_3 + q\beta_3$$
$$x_6 = p\alpha_6 + q\beta_6 + q\lambda_6.$$

Wo p und q zwei Constante sind. Die Gleichungen 8) und 9) des § V ergeben dann mit Hilfe von 12), 13), 14) und 15)

$$(x_4 - p\alpha_4 - q\beta_4)a_4 + (x_5 - p\alpha_5 - q\beta_5)a_5 + q\lambda_6 a_6 = 0$$
$$(x_4 - p\alpha_4 - q\beta_4)b_4 + (x_5 - p\alpha_5 - q\beta_5)b_5 + q(\lambda_6 b_6 + k) = 0.$$

Während 7) ergiebt

$$u_4(x_4 - p\alpha_4 - q\beta_4) + u_5(x_5 - p\alpha_5 - q\beta_5) + u_6\lambda_6 = 0.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die drei Grössen

$$(x_4 - p\alpha_4 - q\beta_4),\ (x_5 - p\alpha_5 - q\beta_5),\ q,$$

so erhält man

$$\begin{vmatrix} u_4, & u_5, & \lambda_6 u_6 \\ a_4, & a_5, & \lambda_6 a_6 \\ b_4, & b_5, & \lambda_6 b_6 + k \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} u_4, & u_5, & u_6 \\ a_4, & a_5, & a_6 \\ b_4, & b_5, & b_6 + \delta_6 \end{vmatrix} = 0$$

wobei $\delta_6 = \frac{k}{\lambda_6}$.

Daraus folgt, dass man das System $\pi(6, \lambda_6)$ auch erhält, wenn man in 6) statt $b_6 : b_6 + \delta_6$ schreibt und dann die letzte Vertikalreihe mit den übrigen combinirt. Es ist also symbolisch:

$$\pi_x(6\lambda_6) = \pi_u(6\delta_6).$$

Dabei sollen die Indices x und u andeuten, dass π einmal in Punkt, das andere mal in Liniencoordinaten ausgedrückt ist. Zugleich ist:

$$\lambda_6 \cdot \delta_6 = k.$$

§ VII.

Ebenso, wie man das System $\pi_x(6, \lambda_6)$ gebildet hat, kann man fünf andere Systeme $\pi_x(1, \lambda_1)$, $\pi_x(2, \lambda_2)$, $\pi_x(3, \lambda_3)$, $\pi_x(4, \lambda_4)$, $\pi_x(5, \lambda_5)$ oder $\pi_u(1, \delta_1)$ etc. bilden, wo die λ, resp. δ 6 vorläufig ganz willkürliche Parameter sind. Zwischen je zwei zusammengehörigen Parametern λ_n und δ_n findet die Gleichung statt

$$\lambda_n \cdot \delta_n = k. \tag{1}$$

Die aus den 6 Systemen π gebildete Figur möge eine Figur **II**, ihre 60 Linien Pascal'sche Linien, ihre 60 Punkte Kirkmann-sche Punkte heissen. Die Pascal'sche Linie

$$\begin{vmatrix} x_1 & , x_2, & x_3 \\ \alpha_1 & , \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1 + \lambda_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

möge der Kürze wegen mit $[1\lambda_1, 23]$ bezeichnet werden. Sie geht durch den Steiner'schen Punkt (123). Die drei Pascal'schen Linien

$$[1\lambda_1, 23], [2\lambda_2, 31], [3\lambda_3, 12]$$

schneiden sich in demselben Steiner'schen Punkt (123)

Die drei Pascal'schen Linien

$$[1\lambda_1, 23], [1\lambda_1, 34], [1\lambda_1, 42]$$

schneiden sich in einem Kirkmann'schen Punkt, der mit $(1\lambda_1, 234)$ bezeichnet werden möge. Derselbe liegt auf der Salmon'schen Linie [2 3 4].

Die bis jetzt über die Figur entwickelten Sätze stehen einander reciprok gegenüber. Sie sind in Folgendem zusammengestellt:

1) Die 20 Steiner'schen Punkte und 15 Plücker'schen Linien bilden eine Figur ϱ. Die 10 Steiner'schen Punktepaare sind daher conjugirte Pole in Bezug auf eine ganze Schaar von Kegelschnitten.

2) Die 20 Salmon'schen Linien und 15 Cayley'schen Punkte bilden eine Figur τ. Die 10 Salmon'schen Linienpaare sind daher conjugirte Polaren in Bezug auf eine ganze Schaar von Curven zweiter Klasse.

3) Durch jeden Steiner'schen Punkt geht diejenige Salmonsche Linie, welche mit der zu diesem Punkte reciproken Salmonschen Linie ein Linienpaar bildet. Die Systeme ϱ und τ bilden zusammen ein System ξ.

4) Die 60 Pascal'schen Linien schneiden sich zu je dreien in einem Steiner'schen Punkt, z. B. $[1\lambda_1, 23]$, $[2\lambda_2, 31]$, $[3\lambda_3, 12]$ im Punkt (123).

5) Die 60 Kirkmann'schen Punkte liegen zu je dreien auf einer Salmon'schen Linie, z. B. die drei Punkte $(1\lambda_1, 234)$, $(5\lambda_5, 234)$, $(6\lambda_6, 234)$ auf der Linie [234].

6) Die 60 Pascal'schen Linien schneiden sich zu je dreien in einem Kirkmann'schen Punkt, z. B. die drei Linien $[1\lambda_1, 23]$, $[1\lambda_1, 34]$, $[1\lambda_1, 42]$ im Punkt $(1\lambda_1, 234)$.

7) Die 60 Kirkmann'schen Punkte liegen zu je dreien auf einer Pascal'schen Linie, z. B. die drei Punkte $(1\lambda_1, 234)$, $(1\lambda_1, 235)$, $(1\lambda_1, 236)$ auf der Pascal'schen Linie $[1\lambda_1, 23]$.

8) Die Pascal'schen Linien und Kirkmann'schen Punkte bilden 6 Figuren π. Jede dieser 6 Figuren hängt von einem Parameter λ ab.

Indem man den Betrachtungen Liniencoordinaten unterlegt, erhalten die 8 Sätze neue Formen, indem die Steiner'schen, Cayley-schen und Kirkmann'schen Punkte mit Plücker'schen, Salmon'schen und Brianchon'schen Punkten, sowie die Plücker'schen, Salmon-schen und Pascal'schen Linien resp. mit Cayley'schen, Steiner-schen und Kirkmann'schen Linien vertauscht werden müssen.

§ VIII.

2 Figuren π aus derselben Reihe, $\pi(1\lambda_1)$, $\pi(1\lambda'_1)$ haben die Eigenschaft, mit einem aus 5 Plücker'schen Linien gebildeten vollständigen Fünfseit und einem aus 5 Cayley'schen Punkten gebildeten vollständigen Fünfeck eine Figur ξ zu bilden.

Aber auch 2 Figuren $\pi(1\lambda_1)$, $\pi(2\lambda_2)$ aus verschiedenen Reihen haben die Eigenschaft, mit einem gewissen vollständigen Fünfeck und einem gewissen vollständigen Fünfseit eine Figur ξ zu liefern. Dieselbe entspringt aus dem System:

$$1)\qquad \left\| \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_1\lambda_2 + x_2\lambda_1, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ \beta_1 + \lambda_1, & \beta_2 + \lambda_2, & \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2, & \beta_3, & \beta_4, & \beta_5, & \beta_6 \end{matrix} \right\|$$

Denn combinirt man die erste Vertikalreihe mit den 5 letzten, so erhält man das System $\pi(1, \lambda_1)$; combinirt man aber die zweite Vertikalreihe mit den 5 letzten, so erhält man das System $\pi(2, \lambda_2)$. Das neu hinzutretende vollständige Fünfseit erhält man durch Combination der beiden ersten Vertikalreihen mit je einer der 5 letzten. Es enthält die Plücker'sche Linie [1 2], denn die drei ersten Vertikalreihen ergeben dieselbe und die vier Steiner'schen Punkte (1 2 3), (1 2 4), (1 2 5), (1 2 6). Die übrigen vier Seiten mögen mit

$$[3, \lambda_1\lambda_2],\ [4, \lambda_1\lambda_2],\ [5, \lambda_1\lambda_2],\ [6, \lambda_1\lambda_2]$$

und ihre 6 Durchschnittspunkte mit

$$(34, \lambda_1\lambda_2) \text{ etc.} \ldots$$

bezeichnet werden.

Das hinzutretende vollständige Fünfeck erhält man durch Combination der fünf letzten Vertikalreihen. Es enthält den Cayley-schen Punkt (1234) und die vier Salmon'schen Linien [123], [234], [341], [412].

Die vier übrigen Punkte mögen mit

$$(345, \lambda_1\lambda_2),\ (456, \lambda_1\lambda_2),\ (563, \lambda_1\lambda_2),\ (634, \lambda_1\lambda_2)$$

und ihre 6 Verbindungslinien mit

$$[34, \lambda_1\lambda_2] \text{ etc.}$$

bezeichnet werden.

Neu hinzutretende Elemente sind also ein vollständiges Vierseit $s(\lambda_1 \lambda_2)$ und ein vollständiges Viereck $e(\lambda_1 \lambda_2)$.

Indem man auf diese Weise alle 6 Systeme

$$\pi(1, \lambda_1), \ \pi(2, \lambda_2) \ldots \text{etc.}$$

combinirt, erhält man 15 Vierecke $e(\lambda_1 \lambda_2)$, $e(\lambda_1 \lambda_3)$ etc. . . und 15 Vierseite $s(\lambda_1 \lambda_2)$, $s(\lambda_1 \lambda_3)$ etc. Die 60 Punkte der 15 Vierecke haben die Eigenschaft, zu je drei auf einer Salmon'schen Linie zu liegen, so z. B. die Punkte

$$(\lambda_1 \lambda_2, 345), \ (\lambda_2 \lambda_6, 345), \ (\lambda_6 \lambda_1, 345) \text{ auf der Linie } [345].$$

Der reciproke Satz gilt von den 60 Linien der 15 Vierseite.

Man kann nun die Frage aufwerfen:

Unter welchen Umständen sind die erhaltenen 60 Punkte 60 Kirkmann'sche Punkte einer Figur **II** $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4, \lambda'_5, \lambda'_6)$?

Unter welchen Umständen sind die erhaltenen 60 Linien 60 Pascal'sche Linien einer Figur **II** $(\lambda''_1, \lambda''_2, \lambda''_3, \lambda''_4, \lambda''_5, \lambda''_6)$?

Diese Frage erscheint naturgemäss, wenn man bedenkt, dass, wenn dem Wort „Pascal'sche Linie" wieder seine ursprüngliche Bedeutung gegeben wird, diese 60 Linien wieder die Pascal'schen Linien sind, dass also die Pascal'sche Figur sich selbst wieder erzeugt, während nach den Untersuchungen von Veronese die 60 Punkte zu 6 Systemen π gehören, die die Eigenschaften unserer allgemeineren Pascal'schen Figur haben.

§ IX.

Es ist nur nöthig, die zweite Frage in Angriff zu nehmen, da die erste sich dann durch Einführung von Liniencoordinaten sofort erledigt.

Da im speciellen Pascal'schen System die Linie $[1, \lambda_2, \lambda_3]$ identisch ist mit einer Linie $[1\,\lambda'_1, 2\,3]$, so ist es zunächst unsere Aufgabe, die Gleichung der Linie $[1, \lambda_2 \lambda_3]$ in eine Form $[1\,\lambda'_1, 23]$ zu bringen. Die Gleichung von $[1, \lambda_2 \lambda_3]$ ist

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2 + \lambda_2, & \beta_3 + \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \gamma\beta_1 + \delta\alpha_1, & \gamma(\beta_2 + \lambda_2) + \delta\alpha_2, & \gamma(\beta_3 + \lambda_3) + \delta\alpha_3 \end{vmatrix} = 0$$

wo γ und δ zwei Constanten sind. Man kann dieselben so bestimmen, dass

$$\gamma(\beta_2 + \lambda_2) + \delta\,\alpha_2 = \beta_2$$
$$\gamma(\beta_3 + \lambda_3) + \delta\,\alpha_3 = \beta_3$$

Dann ist

$$\gamma\beta_1 + \delta\,\alpha_1 = \frac{-\beta_1(\beta_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\beta_3) + \alpha_1(\beta_2\,\lambda_3 - \beta_3\,\lambda_2)}{-(\beta_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\beta_3) - (\lambda_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\lambda_3)}$$

und daher

1) $$\gamma\beta_1 + \delta\,\alpha_1 - \beta_1 = \frac{\alpha_1(\beta_2\,\lambda_3 - \beta_3\,\lambda_2) + \beta_1\,(\alpha_3\,\lambda_2 - \alpha_2\,\lambda_3)}{-(\beta_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\beta_3) - (\lambda_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\lambda_3)} = \lambda'_1$$

Und man erhält daher

$$[1, \lambda_2\,\lambda_3] = [1, \lambda'_1, 23]$$

wobei

$$\lambda'_1 = \frac{a\,\alpha_1 + b\,\beta_1}{-c-b} \text{ und}$$

$$a = \beta_2\,\lambda_3 - \beta_3\,\lambda_2$$
$$b = \lambda_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\lambda_3$$
$$c = \beta_2\,\alpha_3 - \beta_2\,\alpha_3.$$

Wenn nun die 10 Linien

$$[1, \lambda_2\,\lambda_3],\ [1, \lambda_2\,\lambda_4],\ [1, \lambda_2\,\lambda_5] \text{ etc.}$$

10 Linien eines und desselben Systems $\pi(1, \lambda'_1)$ sein sollen, so müssen die 10 verschiedenen Werthe für λ'_1, die man erhält, wenn man in 1) die Indices 2, 3, 4, 5, 6 vertauscht, einander gleich sein, d. h. es müssen die Verhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ bei dieser Vertauschung dieselben bleiben.

Nennt man dieselben e und f, so ist

$$\beta_2\,\lambda_3 - \beta_3\,\lambda_2 = e(\beta_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\beta_3)$$
$$\alpha_2\,\lambda_3 - \lambda_2\,\alpha_3 = -f(\beta_2\,\alpha_3 - \alpha_2\,\beta_3)$$

und daher

2)

$$\lambda_2 = e\,\alpha_2 + f\beta_2$$
$$\lambda_3 = e\,\alpha_3 + f\beta_3$$

Ebenso folgt

$$\lambda_4 = e\,\alpha_4 + f\beta_4$$
$$\lambda_5 = e\,\alpha_5 + f\beta_5$$
$$\lambda_6 = e\,\alpha_6 + f\beta_6$$

Fügt man zu diesen noch die Gleichung

$$\lambda_1 = e\,\alpha_1 + f\beta_1$$

so erhält man in 2) die 6 Bedingungen dafür, dass das System

$$\Pi_x(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$$

wieder ein System

$$\Pi_x(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4, \lambda'_5, \lambda'_6)$$

erzeugt.

Da das ursprüngliche System Π durch die Parameter e und f bestimmt ist, so möge es kurz ein System $\Pi_x(e\,f)$ heissen.

Das neue System $\Pi_x(\lambda'_1 \ldots \lambda'_6)$ geht dann in ein System $\Pi_x(e'f')$ über; dabei ist:

$$\left.\begin{array}{l} e' = \dfrac{-e}{1+f},\ f' = \dfrac{-f}{1+f} \text{ und daher auch} \\ e = \dfrac{-e'}{1+f'},\ f = \dfrac{-f'}{1+f'} \end{array}\right\} \quad 3)$$

d. h. das System $\Pi_x(e'f')$ erzeugt wieder auf dieselbe Weise das System $\Pi_x(e\,f)$, wie das System $\Pi_x(e\,f)$ das System $\Pi_x(e'f')$ erzeugt hat.

Im Folgenden sollen nur solche Systeme Π betrachtet werden, zwischen deren Parametern die Gleichungen 2) stattfinden, also Systeme von der Form $\Pi(e\,f)$. Dieselben sollen jetzt speciell Pascal'sche Figuren genannt werden. Zwei Figuren $\Pi(e\,f)$ und $\Pi(e'f')$, zwischen deren Parametern die Gleichungen 3) stattfinden, sollen zwei conjugirte Pascal'sche Figuren heissen.

Die speciellen Systeme Π, die man erhält, wenn man von Liniencoordinaten ausgeht, sollen Brianchon'sche Figuren heissen. Jede Brianchon'sche Figur bildet dann mit einer gewissen anderen ein conjugirtes Paar.

§ X.

Das System $\Pi(e\,f)$ hat die Linie

$$\begin{vmatrix} x_1 & , x_2, & x_3 \\ \alpha_1 & , \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1 + e\alpha_1 + f\beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} x_1 & , x_2 & , x_3 \\ \alpha_1 & , \alpha_2 & , \alpha_3 \\ (\frac{e}{f}\alpha_1 + \beta_1) + f(\frac{e}{f}\alpha_1 + \beta_1), & \frac{e}{f}\alpha_2 + \beta_2, & \frac{e}{f}\alpha_3 + \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} x_1 & , x_2, & x_3 \\ \alpha_1 & , \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta'_1 + \lambda\beta'_1, & \beta'_2, & \beta'_3 \end{vmatrix} = 0$$

wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{l} \beta'_1 = \beta_1 + \dfrac{e}{f}\alpha_1 \\ \beta'_2 = \beta_2 + \dfrac{e}{f}\alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda = f. \end{array}\right\} \quad 1)$$

Das System 4 des § V bleibt unverändert, wenn man statt $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ etc. $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3 \ldots$ setzt. Dann hat man also, um das System Π (e f) zu bilden, die 6 Grössen λ den Coefficienten β' proportional zu setzen. Setzt man $\frac{e}{f} = r$, so kann man das System Π (e f) auch schreiben $\Pi (r, \lambda)$.

Das conjugirte System zu $\Pi (r, \lambda)$ ist $\Pi (r\, \lambda')$, wobei

2) $$\lambda' = \frac{-\lambda}{1+\lambda}$$

In den folgenden Entwickelungen sollen nur solche Systeme betrachtet werden, in welchen r, also auch $\beta'_1, \beta'_2 \ldots$ feste Werthe haben. Dann hängen sie nur von dem Parameter λ ab.

Das System 4) des § V bleibt unverändert, wenn man $\beta'_1, \beta'_2 \ldots$ an die Stelle von $\beta_1, \beta_2 \ldots$ schreibt. Es bleibt ferner unverändert, wenn man die Elemente der ersten, zweiten, ... Vertikalreihe beziehungsweise durch $\beta'_1, \beta'_2 \ldots$ dividirt. Dadurch werden die Elemente der letzten Horizontalreihe sämmtlich = 1. Die neuen Functionen und Constanten mögen mit $x'_1, x'_2 \ldots; \alpha'_1, \alpha'_2 \ldots$ bezeichnet werden.

Die Plücker'sche Linie [1 2] hat dann die Gleichung:

3) $$\frac{x'_1}{\alpha'_1} = \frac{x'_2}{\alpha'_2}$$

Die Salmon'sche Linie [1 2 3] hat die Gleichung:

4) $$\begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ oder } \frac{x'_1 - x'_2}{\alpha'_1 - \alpha'_2} = \frac{x'_2 - x'_3}{\alpha'_2 - \alpha'_3} = \frac{x'_3 - x'_1}{\alpha'_3 - \alpha'_1}$$

Die Pascal'sche Linie [1 λ_1, 2 3] hat die Gleichung:

5) $$\begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, & x'_3 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3 \\ 1+\lambda, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ oder } \frac{p x'_1 - x'_2}{p \alpha'_1 - \alpha'_2} = \frac{p x'_1 - x'_3}{p \alpha'_1 - \alpha'_3} = \frac{x'_2 - x'_3}{\alpha'_2 - \alpha'_3}$$

6) wobei $$p = \frac{1}{1+\lambda}$$

Die Gleichungen der übrigen Pascal'schen Linien erhält man aus 5) durch Vertauschung der Indices, während die Constante p unverändert bleibt. Die Constanten zweier conjugirter Pascal-scher Figuren genügen der Gleichung

7) $$p \cdot p' = 1$$

die aus 2) mit Hilfe von 6) folgt.

Die Pascal'sche Figur hängt, sobald man die gestrichenen

Functionen und Constanten eingeführt hat, nur von p ab; sie soll daher $\Pi(p)$ heissen. Die beiden Figuren $\Pi(p)$ und $\Pi(\frac{1}{p})$ sind conjugirt.

§ XI.

Es sei gegeben die Linie

$$\frac{a x'_1 + b x'_2}{a \alpha'_1 + b \alpha'_2} = \frac{c x'_3 + d x'_4}{c \alpha'_3 + d \alpha'_4} \qquad 1)$$

wo a, b, c, d vier beliebige Constanten sind. Durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 erhält man hieraus 360 Linien, so lange zwischen den a, b, c, d keine Bedingungen existiren. Von diesen 360 Linien gilt folgender Satz:

Man kann die 360 Geraden, die aus 1) durch Vertauschung der Indices entstehen, auf 88680 Arten zu je 6 zu den Seiten eines Pascal'schen Sechsecks combiniren. Die zugehörigen Pascal'schen Linien sind folgende:

1) Die 240 Pascal'schen Linien der vier Systeme

$$\Pi(-\frac{a}{b}),\ \Pi(-\frac{b}{a}),\ \Pi(-\frac{c}{d}),\ \Pi(-\frac{d}{c})$$

und zwar tritt jede derselben 220 Mal auf.

2) Die 15 Plücker'schen Linien; jede derselben tritt 2024 Mal auf.

3) Die 480 Linien, die aus folgenden vier durch Vertauschung der Indices hervorgehen:

$$\frac{a x'_1 + b x'_2}{a \alpha'_1 + b \alpha'_2} = \frac{c x'_1 + d x'_3}{c \alpha'_1 + d \alpha'_3}$$

$$\frac{a x'_1 + b x'_2}{a \alpha'_1 + b \alpha'_2} = \frac{c x'_3 + d x'_1}{c \alpha'_3 + d \alpha'_1}$$

$$\frac{a x'_2 + b x'_1}{a \alpha'_2 + b \alpha'_1} = \frac{c x'_1 + d x'_3}{c \alpha'_1 + d \alpha'_3}$$

$$\frac{a x'_2 + b x'_1}{a \alpha'_2 + b \alpha'_1} = \frac{c x'_3 + d x'_1}{c \alpha'_3 + d \alpha'_1}$$

Jede dieser Linien tritt einmal auf.

4) Die 240 Linien, die aus folgenden beiden durch Vertauschung der Indices hervorgehen:

$$\frac{a x'_1 + b x'_2}{a \alpha'_1 + b \alpha'_2} = \frac{a x'_2 + b x'_3}{a \alpha'_2 + b \alpha'_3}$$

$$\frac{c x'_1 + d x'_2}{c \alpha'_1 + d \alpha'_2} = \frac{c x'_2 + d x'_3}{c \alpha'_2 + d \alpha'_2}$$

Jede derselben tritt 20 Mal auf.

5) Die 240 Linien, die aus den beiden

$$\frac{x'_1}{\alpha'_1} = \frac{a x'_2 + b x'_3}{a \alpha'_2 + b \alpha'_3}$$

$$\frac{x'_1}{\alpha'_1} = \frac{c x'_2 + d x'_3}{c \alpha'_2 + d \alpha'_3}$$

durch Vertauschung der Indices hervorgehen. Jede derselben tritt einmal auf.

Die gerade Linie

$$\frac{ax'_1 + bx'_2}{a\alpha'_1 + b\alpha'_2} = \frac{cx'_3 + dx'_4}{c\alpha'_3 + d\alpha'_4}$$

möge mit [1 2, 3 4] bezeichnet werden. In Bezug auf die Constanten a und b kann man die 360 Linien in 30 Gruppen von je 12 bringen, je nach den Indices der Functionen, mit denen a und b multiplicirt sind. Sie mögen die Gruppen $\begin{Bmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}$ etc. heissen.

Vertauscht man in den 12 Linien der Gruppe $\begin{Bmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$ den Index 2 mit dem Index 3, so erhält man die 12 Linien der Gruppe $\begin{Bmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}$. Die 12 Durchschnittspunkte jeder Linie der ersten Gruppe mit der aus ihr durch die Transposition (2 3) entstandenen der zweiten Gruppe liegen sämmtlich auf der Linie

$$\frac{ax'_1 + bx'_2}{a\alpha'_1 + b\alpha'_2} = \frac{ax'_1 + bx'_3}{a\alpha'_1 + b\alpha'_3}$$

d. h. auf einer Pascal'schen Linie des Systems $\mathbf{II}(-\frac{a}{b})$.

Bei denjenigen Linien der Gruppe $\begin{Bmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$, die den Index 3 gar nicht besitzen, ist dies sofort klar. Von den übrigen genügt der Beweis von einer, da die für die anderen analog sind. Eine der Linien ist z. B.:

$$\frac{ax'_1 + bx'_2}{a\alpha'_1 + b\alpha'_2} = \frac{cx'_3 + dx'_4}{c\alpha'_3 + d\alpha'_4}$$

Die entsprechende der Gruppe $\begin{Bmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}$ ist:

$$\frac{ax'_1 + bx'_3}{a\alpha'_1 + b\alpha'_3} = \frac{cx'_2 + dx'_4}{c\alpha'_2 + d\alpha'_4}$$

Man kann diese beiden Gleichungen bringen auf die Form

$$\frac{ax'_1 + bx'_2}{a\alpha'_1 + b\alpha'_2} = \frac{acx'_1 + bdx'_4 + bc(x'_2 + x'_3)}{ac\alpha'_1 + bd\alpha'_4 + bc(\alpha'_2 + \alpha'_3)}$$

$$\text{und } \frac{ax'_1 + bx'_3}{a\alpha'_1 + b\alpha'_3} = \frac{acx'_1 + bdx'_4 + bc(x'_3 + x'_2)}{ac\alpha'_1 + bd\alpha'_4 + bc(\alpha'_3 + \alpha'_2)}$$

Daraus folgt, dass ihr Durchschnittspunkt ebenfalls auf der Linie liegt:

$$\frac{ax'_1 + bx'_2}{a\alpha'_1 + b\alpha'_2} = \frac{ax'_1 + bx'_3}{a\alpha'_1 + b\alpha'_3}$$

Irgend drei Linien von $\left\{\begin{matrix} a & b \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\}$ bilden daher mit den entsprechenden von $\left\{\begin{matrix} a & b \\ 1 & 3 \end{matrix}\right\}$ 6 Seiten eines Pascal'schen Sechsecks. Da die Gruppe $\left\{\begin{matrix} a & b \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\}$ 12 Linien enthält, so erhält man $\frac{12.11.10}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ = 220 Combinationen, die alle die Pascal'sche Linie [1, 2 3] des Systems $\mathbf{II}(-\frac{a}{b})$ besitzen. Dasselbe gilt natürlich von allen Linien des Systems $\mathbf{II}(-\frac{a}{b})$, sowie der entsprechend gebildeten Systeme $\mathbf{II}(-\frac{b}{a})$, $\mathbf{II}(-\frac{c}{d})$ und $\mathbf{II}(-\frac{d}{c})$.

Aus jeder Linie der Gruppe $\left\{\begin{matrix} a & b \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\}$ erhält man durch die Transposition (12) eine Linie des Systems $\left\{\begin{matrix} a & b \\ 2 & 1 \end{matrix}\right\}$. Der Durchschnittspunkt je zweier entsprechender Linien liegt dann auf der Linie

$$\frac{a x'_1 + b x'_2}{a \alpha'_1 + b \alpha'_2} = \frac{a x'_2 + b x'_1}{a \alpha'_2 + b \alpha'_1} = \frac{(a^2 - b^2) x'_1}{(a^2 - b^2) \alpha'_1} = \frac{(b^2 - a^2) x'_2}{(b^2 - a^2) \alpha'_2} = \frac{x'_1}{\alpha'_1} = \frac{x'_2}{\alpha'_2}$$

Aber auch die beiden Gruppen $\left\{\begin{matrix} c & d \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} c & d \\ 2 & 1 \end{matrix}\right\}$ haben die Eigenschaft, dass die Durchschnittspunkte jeder der Linien der ersten Gruppe mit der durch die Transposition (1 2) entstandenen auf dieser Plücker'schen Linie [1 2] liegen. Man kann daher die 48 Linien dieser vier Gruppen $\left\{\begin{matrix} a & b \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} a & b \\ 2 & 1 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} c & d \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} c & d \\ 2 & 1 \end{matrix}\right\}$ auf $\frac{24\ .\ 23\ .\ 22}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ = 2024 Weisen zu je 6 Linien eines Pascal'schen Sechsecks combiniren. Dasselbe gilt natürlich auch von den übrigen Plücker-schen Linien.

Durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien [1 2, 3 4], [1 3, 2 4] geht, wie aus den Ueberlegungen dieses Paragraphen folgt, die Linie

$$\frac{a x'_1 + b x'_2}{a \alpha'_1 + b \alpha'_2} = \frac{c x'_2 + d x'_4}{c \alpha'_2 + d \alpha'_4}$$

Auf derselben Linie liegt auch der Durchschnittspunkt der beiden Linien [1 2, 5 4] und [1 5, 2 4], sowie von [1 2, 6 4] und [1 6, 2 4]. Diese 6 Linien sind daher ebenfalls 6 Linien eines Pascal'schen Sechsecks.

Durch Vertauschung der Indices, sowie durch Vertauschung von b mit a und von c mit d erhält man hieraus 480 Combinationen.

In der Gruppe $\begin{Bmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$ sind 6 Linien enthalten, die den Index 3 nicht enthalten. Durch die Substitution (1 2 3) gehen dieselben in 6 Linien der Gruppe $\begin{Bmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{Bmatrix}$ über, welche den Index 2 nicht enthalten. Die 6 Durchschnittspunkte entsprechender Linien liegen daher auf der Linie

$$\frac{a x'_1 + b x'_2}{a \alpha'_1 + b \alpha'_2} = \frac{a x'_2 + b x'_3}{a \alpha'_2 + b \alpha'_3}$$

Dieselbe tritt daher $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ mal als Pascal'sche Linie auf. Durch Vertauschung der Indices, sowie von a und b mit c und d erhält man hieraus 240 Linien.

Durch den Durchschnittspunkt von [1 2, 3 4] und [2 1, 3 4] geht die Linie

$$\frac{x'_1}{\alpha'_1} = \frac{c x'_3 + d x'_4}{c \alpha'_3 + d \alpha'_4}$$

Dieselbe Linie geht durch den Durchschnittspunkt von [1 5, 3 4] und [5 1, 3 4], sowie von [1 6, 3 4] und [6 1, 3 4]. Dieselben bilden daher mit dem ersten Linienpaar die 6 Seiten eines Pascal'schen Sechsecks. Durch Vertauschung der Indices, sowie durch Vertauschung von c und d mit a und b erhält man 240 Combinationen.

Die 360 Linien [1 2, 3 4] etc. lassen sich daher in der That auf 88680 verschiedene Arten zu je 6 zu den Seiten eines Pascal-schen Sechsecks combiniren. Die von ihnen und den zugehörigen Pascal'schen Linien gebildete Figur umfasst so ziemlich alle diejenigen, die bis jetzt in Bezug auf das Hexagrammum Mysticum aufgestellt worden sind.

Die 360 Linien gehen unter gewissen Umständen durch Zusammenfallen von je 24 in 15 über und die 88680 Combinationen theils durch Illusorischwerden einzelner, theils durch Zusammenfallen in 60. Unter noch grösserer Beschränkung gehen dieselben in die 15 Verbindungslinien von 6 auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten über.

Das System der 360 Linien hängt von 3 Parametern ab, nämlich von r, welches in den Functionen x' und Constanten α' enthalten ist und von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

Indem man von den im § V No. 5) und 6) aufgestellten Systemen ϱ und τ in Liniencoordinaten ausgeht, erhält man in gleicher Weise 360 Punkte, die zu den 360 Linien dieses Paragraphen dualistische Eigenschaften haben.

§ XII.

Es sei 1) a = b, c = d, wo a, b, c, d die vier Constanten des vorigen Paragraphen sind. Dann fallen je acht der 360 Linien zusammen, so dass man nur 45 Linien erhält. Die Combinationen 2) und 5) werden illusorisch.

Die Gruppe {1 2} umfasst jetzt die 6 Linien:

[1 2, 3 4], [1 2, 3 5], [1 2, 3 6], [1 2, 4 5], [1 2, 5 6], [1 2, 6 4].

Die Gruppe {1 3} enthält die 6 Linien:

[1 3, 2 4], [1 3, 2 5], [1 3, 2 6], [1 3, 4 5], [1 3, 5 6], [1 3, 6 4].

Die aus diesen Gruppen resultirenden Combinationen sind daher nur noch 20. Die zugehörige Pascal'sche Linie hat die Gleichung:

$$\frac{x'_1 + x'_2}{\alpha'_1 + \alpha'_2} = \frac{x'_1 + x'_3}{\alpha'_1 + \alpha'_3} \qquad 1)$$

Zu jeder Pascal'schen Linie gehören also 20 Sechsecke, so dass man 60 . 20 = 1200 erhält.

Die Combinationen 3) und 4) des § XI. sind in diesen enthalten.

Es giebt aber in diesem Falle noch andere, als die im vorigen Paragraphen erhaltenen Combinationen von je 6 der 45 Linien zu 6 Seiten eines Pascal'schen Sechsecks.

Die Gruppe {1 2} enthält die 6 Linien:

[1 2, 3 4], [1 2, 3 5], [1 2, 3 6], [1 2, 4 5], [1 2, 5 6], [1 2, 6 4].

Die Gruppe {2 3} enthält die 6 Linien:

[2 3, 1 4], [2 3, 1 5], [2 3, 1 6], [2 3, 4 5], [2 3, 5 6], [2 3, 6 4].

Die Gruppe {3 1} enthält die 6 Linien:

[3 1, 2 4], [3 1, 2 5], [3 1, 2 6], [3 1, 4 5], [3 1, 5 6], [3 1, 6 4].

Jeder Linie der Gruppe {1 2} entspricht vermittelst der Transposition (2 3) eine Linie von {1 3} und vermittelst der Transposition (1 3) eine Linie von {2 3}. Diese beiden Linien haben aber die Eigenschaft, durch die Transposition (1 2) in einander überzugehen, sind also entsprechende Linien von {1 2} und {1 3}. Die drei entsprechenden Linien bilden ein Dreieck, dessen Ecken auf den sich

im Steiner'schen Punkt (1 2 3) schneidenden Pascal'schen Linien [1, 2 3], [2, 3 1], [3, 1 2] liegen.

Die 6 Dreiecke, die man auf diese Weise erhält, sind also zu einander perspectivisch, je zwei derselben bilden daher die 6 Seiten eines Pascal'schen Sechsecks.

Die drei letzten dieser Dreiecke geben, mit einander combinirt, nichts Neues, wohl aber die der drei ersten unter sich und je eines der drei ersten mit je einem der letzten.

Die beiden ersten Dreiecke sind

[1 2, 3 4], [2 3, 1 4], [3 1, 2 4]
[1 2, 3 5], [2 3, 1 5], [3 1, 2 5]

Man kann die Gleichung von [1 2, 3 4] in die Form bringen:

$$\frac{x'_1 + x'_2}{\alpha'_1 + \alpha'_2} = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4}$$

Ebenso die von [1 2, 3 5] in die Form:

$$\frac{x'_1 + x'_2}{\alpha'_1 + \alpha'_2} = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_5}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_5}$$

Daraus folgt, dass durch ihren Durchschnittspunkt die Linie geht:

$$2)\qquad \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4} = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_5}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_5}$$

Dieselbe Linie geht auch durch den Durchschnitt von [2 3, 1 4] mit [2 3, 1 5], sowie von [3 1, 2 4] mit [3 1, 2 5], sie ist also die zugehörige Pascal'sche Linie.

Durch den Durchschnittspunkt von [1 2, 3 4] und [1 2, 4 5] geht die Linie

$$3)\qquad \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4} = \frac{x'_4 + x'_5}{\alpha'_4 + \alpha'_5}$$

Sie geht auch durch den Durchschnittspunkt von [2 3, 1 4] mit [2 3, 4 5], sowie von [3 1, 2 4] mit [3 1, 4 5], ist also die zugehörige Pascal'sche Linie.

Aus 2) erhält man im ganzen System 60 und aus 3) 120 Linien durch Vertauschung der Indices. Doch wollen wir die Betrachtungen, die man an dieselben knüpfen kann, vorläufig übergehen, um später auf dieselben zurückzukommen.

Die drei Linien [1 2, 3 4], [3 4, 5 6], [5 6, 1 2] schneiden sich in einem Punkt (1 2, 3 4, 5 6). Die Gleichungen für diesen Punkt kann man schreiben:

$$4)\qquad \frac{x'_1 + x'_2}{\alpha'_1 + \alpha'_2} = \frac{x'_3 + x'_4}{\alpha'_3 + \alpha'_4} = \frac{x'_5 + x'_6}{\alpha'_5 + \alpha'_6} = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + x'_6}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha'_6}$$

Daraus folgt, dass der Punkt (1 2, 3 4, 5 6) auf der Linie liegt:

$$\frac{x'_1 + x'_2}{\alpha'_1 + \alpha'_2} = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + x'_6}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha'_6} \qquad 5)$$

Auf derselben Linie liegt auch der Punkt (1 2, 3 5, 4 6) und (1 2, 3 6, 4 5).

Die aus den 15 Linien 5) und 15 Punkten 4) gebildete Figur besitzt Eigenschaften, welche eine bemerkenswerthe Illustration zur Theorie der Substitutionen von 6 Elementen bilden. Doch würde die Entwickelung derselben zu weit von unserem Ziele führen.

§ XIII.

Es sei 2) $a = -b$, $c = -d$.

Aus den 360 Linien des § XI werden jetzt 45. Dieselben entstehen aus der Linie

$$\frac{x'_1 - x'_2}{\alpha'_1 - \alpha'_2} = \frac{x'_3 - x'_4}{\alpha'_3 - \alpha'_4}$$

durch Vertauschung der Indices.

Die vier Systeme **II** werden sämmtlich einander gleich und zwar = **II**(1), d. h. sie gehen in die 20 Salmon'schen Linien über. Je drei entsprechende Linien der drei Combinationen {1 2}, {2 3}, {3 1} schneiden sich in einem Punkt der Salmon'schen Linie [1 2 3]. Drei dieser sechs Punkte sind die drei Cayley'schen Punkte (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 3 6), so z. B. schneiden sich die drei Linien

[1 2, 3 4], [2 3, 1 4], [3 1, 2 4]

im Punkt (1 2 3 4).

Die drei Linien [1 2, 4 5], [2 3, 4 5], [3 1, 4 5] schneiden sich ebenfalls in einem Punkte (1 2 3, 4 5). Die beiden anderen in Betracht kommenden Punkte sind (1 2 3, 5 6), (1 2 3, 6 4).

Indem man aus den 6 Punkten 3 und aus jedem Linientripel, das durch jeden dieser drei Punkte geht, zwei Linien herausgreift, erhält man also 6 Seiten eines Pascal'schen Sechsecks, dessen Pascal'sche Linie die Linie [1 2 3] ist.

Zu jeder Linie [1 2 3] erhält man auf diese Weise 540 Pascal-sche Sechsecke, im Ganzen also $540 \,.\, 20 = 10800$.

Die 45 Linien [1 2, 3 4] etc. schneiden sich ausser zu je drei in den 15 Cayley'schen Punkten noch zu je drei in 15 anderen Punkten. Z. B. die drei Linien

1) $\frac{x'_1 - x'_2}{\alpha'_1 - \alpha'_2} = \frac{x'_3 - x'_4}{\alpha'_3 - \alpha'_4}$; $\frac{x'_3 - x'_4}{\alpha'_3 - \alpha'_4} = \frac{x'_5 - x'_6}{\alpha'_5 - \alpha'_6}$; $\frac{x'_5 - x'_6}{\alpha'_5 - \alpha'_6} = \frac{x'_1 - x'_2}{\alpha'_1 - \alpha'_2}$

in einem Punkt. Auf die Betrachtung dieser 15 Punkte werden wir später zurückkommen.

§ XIV.

In § IX No. 2 sind die Bedingungen aufgestellt, unter welchen ein System $\mathbf{II}_x(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ ein Pascal'sches System bildete. Genau ebenso erhält man die Bedingungen, unter welchen ein System $\mathbf{II}_u(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6)$ ein Brianchon'sches System bildet. Sie sind:

1) $$\begin{cases} \delta_1 = g a_1 + h b_1, & \delta_4 = g a_4 + h b_4, \\ \delta_2 = g a_2 + h b_2, & \delta_5 = g a_5 + h b_5, \\ \delta_3 = g a_3 + h b_3, & \delta_6 = g a_6 + h b_6, \end{cases}$$

wo g und h irgend zwei Constante sind. Will man das System $\mathbf{II}_u(\delta_1 \ldots \delta_6)$ in die Form $\mathbf{II}_x(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6)$ bringen, so hat man

2) $$\lambda_1 \delta_1 = \lambda_2 \delta_2 = \lambda_3 \delta_3 = \lambda_4 \delta_4 = \lambda_5 \delta_5 = \lambda_6 \delta_6 = k$$

wo k die in § V 15) angegebene Constante ist.

Die Bedingungen, denen die λ zu genügen haben, damit ein System $\mathbf{II}_x(\lambda_1 \ldots \lambda_6)$ ein Brianchon'sches System ist, sind daher:

3) $$\lambda_1 = \frac{1}{g a_1 + h b_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{g a_2 + h b_2} \ldots .$$

wo statt $\frac{g}{k}$ und $\frac{h}{k}$ wieder g und h geschrieben ist.

Sie sind von den Bedingungen 2) des § IX verschieden. Es wird daher im Allgemeinen nicht möglich sein, die vier Constanten e, f, g, h so zu bestimmen, dass die Gleichungen 2) des § IX und die Gleichungen 3) dieses Paragraphen zusammenbestehen.

Wir wollen jetzt annehmen, dass das Steiner-Salmon'sche System 3) und 4) oder 5) und 6) des § V derart ist, dass diesen beiden Systemen von Gleichungen durch eine passende Wahl von e, f, g, h genügt werden kann; alsdann ist das System **II** zugleich ein Pascal-sches und ein Brianchon'sches. Existirt ein solches System **II**, so existiren deren unendlich viele, denn ist e, f, g, h eine passende Wahl, so ist auch m e, m f, $\frac{g}{m}$, $\frac{h}{m}$ eine passende.

Zunächst können die Systeme 3) und 4) oder 5) und 6) des § V etwas vereinfacht werden.

Die Systeme 4) und 6), sowie die Gleichungen 7) bis 14) des § V ändern sich nicht, wenn man schreibt

$$e\alpha_1 + f\beta_1 \text{ statt } \beta_1; \; e\alpha_2 + f\beta_2 \text{ statt } \beta_2 \ldots\ldots\ldots$$
$$g a_1 + h b_1 \text{ statt } b_1; \; g a_2 + h b_2 \text{ statt } b_2 \ldots\ldots$$

Ferner ändert sich 3) und 4) nicht, wenn man sämmtliche Glieder jeder Vertikalreihe mit ein und derselben Constanten n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 multiplicirt. Damit die Gleichungen 7) bis 14) bestehen bleiben, muss man in 5) und 6) die sämmtlichen Glieder jeder Vertikalreihe mit $\frac{1}{n_1}$, resp. $\frac{1}{n_2}$ .... multipliciren. Für $n_1, n_2, n_3 \ldots$ sollen gewählt werden $\frac{1}{e\alpha_1 + f\beta_1}$, $\frac{1}{e\alpha_2 + f\beta_2}$, also dass für $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2} \ldots$ $\frac{1}{ga_1 + hb_1}$, $\frac{1}{ga_2 + hb_2}$, ... zu setzen ist.

An Stelle der Coefficienten β_1, β_2 ...., sowie b_1, b_2 ... erhält man dann sämmtlich 1.

Die Systeme 3), 4), 5), 6) des § V erhalten jetzt die Formen

$$\left\|\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \end{matrix}\right\| \qquad 4)$$

$$\left\|\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{matrix}\right\| \qquad 5)$$

$$\left\|\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \end{matrix}\right\| \qquad 6)$$

$$\left\|\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_6, & a_6 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{matrix}\right\| \qquad 7)$$

Die Gleichungen 7) bis 14) des § V gehen über in

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 + u_5 x_5 + u_6 x_6 \equiv ux + vy + wz \qquad 8)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \equiv 0 \qquad 9)$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 + x_6 a_6 \equiv 0 \qquad 10)$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \equiv 0 \qquad 11)$$

$$u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 + u_4 \alpha_4 + u_5 \alpha_5 + u_6 \alpha_6 \equiv 0 \qquad 12)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0 \qquad 13)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 0 \qquad 14)$$

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 \alpha_4 + a_5 \alpha_5 + a_6 \alpha_6 = 0 \qquad 15)$$

Zugleich wird die Constante $k = 6$. 16)

§ XV.

Ein System $\mathbf{II}_x(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ ist zugleich ein Pascalsches und ein Brianchon'sches, wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda \qquad 1)$$

Es kann in die Form $\mathbf{II}_u(\delta)$ gebracht werden; dann ist

$$\lambda . \delta = 6 \qquad 2)$$

Der Begriff der conjugirten Systeme ist jetzt zweideutig, denn einem Systeme $\Pi_x(\lambda)$ entsprechen zwei Systeme $\Pi_x(\lambda')$ und $\Pi_x({}'\lambda)$, je nachdem man das System $\Pi_x(\lambda)$ als ein Pascal'sches oder ein Brianchon'sches betrachtet. Wenn sich zwei Systeme $\Pi_x(\lambda)$ und $\Pi_x(\lambda')$ als Pascal'sche Systeme entsprechen, so findet zwischen ihren Parametern nach Früherem die Gleichung statt.

3) $$\lambda' = \frac{-\lambda}{1+\lambda}, \text{ oder } \lambda\lambda' + \lambda + \lambda' = 0$$

Entsprechen sich aber zwei Systeme $\Pi_x(\lambda)$ und $\Pi_x({}'\lambda)$ als Brianchon'sche, so besteht die Gleichung

$$\frac{6}{{}'\lambda} = \frac{\frac{-6}{\lambda}}{1+\frac{6}{\lambda}} \text{ oder}$$

4) $${}'\lambda = -\lambda - 6, \text{ oder } \lambda + {}'\lambda + 6 = 0$$

Es sei ein System Π mit dem Parameter λ gegeben. Aus 3) findet man ein entsprechendes mit dem Parameter λ', aus IV ein entsprechendes zu λ', mit dem Parameter λ'', zu λ'' ein entsprechendes λ''' aus 3) etc. ad inf.

Man kann aber auch zu $\Pi(\lambda)$ erst mit Hilfe von 4) ein entsprechendes System $\Pi({}'\lambda)$ finden, zu demselben aus 3) das System $\Pi({}''\lambda)$, zu diesem aus 4) das entsprechende $\Pi({}'''\lambda)$ etc. ad inf.

Die auf diese Weise aus $\Pi(\lambda)$ erhaltenen Systeme mit den Parametern

$$\text{ad inf} \ldots\ldots {}'''\lambda, {}''\lambda, {}'\lambda, \lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''' \ldots\ldots \text{ad inf}$$

bilden eine nach beiden Seiten hin unendliche Reihe. Zwischen je zwei auf einander folgenden Parametern findet abwechselnd einmal Gleichung 3), dann Gleichung 4) statt. Wenn zwei aufeinander folgende Parameter, etwa λ und λ' einander gleich sind, so ist auch ${}'\lambda = \lambda''$, ${}''\lambda = \lambda'''$ etc. Denn ${}'\lambda$ wird ebenso aus λ abgeleitet, wie λ'' aus λ' u. s. w. Es verwandelt sich dann die Reihe in eine einfach unendliche:

$$\lambda, \lambda'', \lambda''' \ldots\ldots \text{ad inf.}$$

Dieser Fall kann übrigens nur dann stattfinden, wenn der Parameter λ nach 3) und 4) einer der beiden Gleichungen genügt

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$
$$2\lambda + 6 = 0$$

d. h., wenn $\lambda = 0$, $\lambda = -2$, $\lambda = -3$ und $\lambda = \infty$ ist.

Für $\lambda = 0$, resp. $\lambda = \infty$ erhält man das Cayley-Salmon'sche resp. das Steiner-Plücker'sche System.

Für $\lambda = -2$ erhält man unter speciellen in § XVIII angegebenen Bedingungen die 60 Pascal'schen Linien von 60 aus 6 auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten gebildeten Sechsecken. Die übrigen aus diesem hervorgehenden Systeme mit den Parametern λ'', λ'''... die man aus diesem Systeme erhält, sind diejenigen, die Herr Veronese in seiner Abhandlung „Nuovi teoremi sull' Hexagrammum Mysticum" aufgestellt hat.

§ XVI.

Der Fall $\lambda = -2$ entspricht den Entwickelungen des § XII. Die Pascal'schen Linien erhalten Gleichungen von der Form

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_1 + x_3}{\alpha_1 + \alpha_3} = \frac{x_2 - x_3}{\alpha_2 - \alpha_3} \qquad 1)$$

Dagegen fallen die 45 Linien [1 2, 3 4] des § XII in 15 Linien zusammen.

Denn aus

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_3 + x_4}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

folgt

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_3 + x_4}{\alpha_3 + \alpha_4} = \frac{-(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} = \frac{x_5 + x_6}{\alpha_5 + \alpha_6}, \text{ § XIV 9) und 14)}$$

Daraus folgt, dass die drei Gleichungen

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_3 + x_4}{\alpha_3 + \alpha_4}$$

$$\frac{x_3 + x_4}{\alpha_3 + \alpha_4} = \frac{x_5 + x_6}{\alpha_5 + \alpha_6}$$

$$\frac{x_5 + x_6}{\alpha_5 + \alpha_6} = \frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

die Gleichungen ein und derselben Linie sind, die wir der Kürze wegen mit [1 2, 3 4, 5 6] bezeichnen wollen.

Die Gruppe {1 2} enthält drei Linien [12,34,56], [12,35,46], [12,36,45]; sie bilden ein Dreieck ∇_{12}. Man kann auf diese Weise die 15 Linien in 15 Dreiecke ∇_{12}, ∇_{13} . . . gruppiren. Je zwei dieser Dreiecke, welche keinen Index gemeinsam haben, z. B. ∇_{12} und ∇_{34}, haben eine gerade Linie [1 2, 3 4, 5 6] gemeinsam. Dieselbe Linie hat das Dreieck ∇_{56}. Je zwei Dreiecke, welche einen Index gemeinsam haben, haben keine gerade Linie gemeinsam, z. B. ∇_{12} und ∇_{13}; sie bilden die 6 Seiten eines Pascal'schen Sechsecks S (1, 2 3), deren zugehörige Pascal'sche Linie p (1, 2 3) die Gleichung hat:

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_1 + x_3}{\alpha_1 + \alpha_3}$$

Die fünf Dreiecke ∇_{12}, ∇_{13}, ∇_{14}, ∇_{15}, ∇_{16} haben gar keine Seite gemeinsam. Aus je zwei von ihnen erhält man ein Pascal-sches Sechseck. Diese 10 Sechsecke S (1, 2 3), S (1, 2 4), S (1, 2 5) . . . . und die zugehörigen Pascal'schen Linien p (1, 2 3), p (1, 2 4) p (1, 2 5) . . . . bilden eine Gruppe 1).

Ebenso wie man die Gruppe 1) gebildet hat, kann man die Gruppen 2), 3), 4), 5), 6) bilden. Die 10 Pascal'schen Linien und 10 Kirkmann'schen Punkte jeder Gruppe bilden ein System π.

Die drei Dreiecke ∇_{12}, ∇_{23}, ∇_{31} enthalten neun Linien, aus welchen man drei Sechsecke

S (1, 2 3), S (2, 3 1) S (3, 1 2)

bilden kann. Die drei Dreiecke ∇_{45}, ∇_{56}, ∇_{64} enthalten dieselben neun Linien und kann man dieselben daher auch zu drei anderen Sechsecken S (4, 5 6), S (5, 6 4), S (6, 4 5) combiniren.

Die drei zu den ersten drei Sechsecken gehörigen Pascal'schen Linien p (1, 2 3), p (2, 3 1), p (3, 1 2) schneiden sich in einem Steiner'schen Punkt (1 2 3). Die drei anderen p (4, 5 6), p (5, 6 4), p (6, 4 5) im conjugirten Steiner'schen Punkt (4 5 6).

Diese sämmtlichen 15 Linien bilden eine Steiner'sche Figur ϱ. Denn man erhält ihre Gleichungen, wenn man je zwei der sechs Grössen:

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \frac{x_2 + x_3}{\alpha_2 + \alpha_3}, \quad \frac{x_3 + x_1}{\alpha_3 + \alpha_1}, \quad \frac{x_4 + x_5}{\alpha_4 + \alpha_5}, \quad \frac{x_5 + x_6}{\alpha_5 + \alpha_6}, \quad \frac{x_6 + x_4}{\alpha_6 + \alpha_4}$$

einander gleich setzt.

Die 45 Ecken der 15 Dreiecke ∇_{12}, ∇_{13} . . . entsprechen den 45 Durchschnittspunkten der 15 Verbindungslinien von 6 auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten. Man kann alle Sätze über das Hexagrammum Mysticum, die mir bekannt sind, auf die hier besprochene Figur übertragen, mit Ausnahme des Satzes, dass die Steiner'schen Punktepaare conjugirte Pole in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt sind und zwar aus dem Grunde, weil es überhaupt einen solchen nicht giebt.

Es ist bemerkenswerth, dass gewisse 15 Linien des § XII auch eine solche Figur bilden. Es sind dies z. B. solche 15 Linien [1 2, 3 4], die den Index 6 nicht enthalten. Denn fügt man zu den dann auftretenden Functionen x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5 und den 5 Constanten α'_1, α'_2, α'_3, α'_4, α'_5 noch eine sechste Function x''_6 und Constante α''_6 vermittelst der Gleichungen:

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + x''_6 \equiv 0$$
$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha''_6 = 0$$

so entsprechen diese Gleichungen den Gleichungen 9) und 14) des § XIV. Diejenigen 30 Pascal'schen Linien, die in ihren Gleichungen die Function x''_6 und Constante α''_6 enthalten, sind ebenfalls in § XII schon angegeben und zwar in 2) und 3). Denn man kann 2) schreiben in der Form:

$$\frac{x''_6 + x'_5}{\alpha''_6 + \alpha'_5} = \frac{x''_6 + x'_4}{\alpha''_6 + \alpha'_4}$$

und 3) in der Form:

$$\frac{x'_5 + x''_6}{\alpha'_5 + \alpha''_6} = \frac{x'_5 + x'_4}{\alpha'_5 + \alpha'_4}$$

Durch Vertauschung des Index 6 mit einem anderen kann man die 45 Linien des § XII auf sechs verschiedene Weisen zu einer Figur dieses Paragraphen combiniren.

§ XVII.

Der Fall $\lambda = -3$ erledigt sich sofort durch Einführung von Liniencoordinaten, da $\Pi_x(-3) = \Pi_u(\frac{6}{-3}) = \Pi_u(-2)$ ist.

Man erhält also auch 15 Punkte, die man auf 60 verschiedene Weisen zu je 6 zu den 6 Ecken eines Tangentensechsecks combiniren kann und welche 15 Punkte unter speciellen Umständen in die 15 Schnittpunkte von 6 Tangenten eines Kegelschnitts übergehen. Durch Einführung der allgemeineren Figuren von 15 Linien und von 15 Punkten wird also die Reciprocität eine vollständige.

Um den Zusammenhang zwischen den beiden Figuren klarzulegen, ist es zweckmässig, auch die 15 Punkte in Punktcoordinaten darzustellen. Die Gleichungen der Pascal'schen Linien erhalten jetzt die Form:

$$\frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2}{\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_3}{\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_3} \qquad 1)$$

oder

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{x_2 - x_3}{\alpha_2 - \alpha_3}$$

Für den Kirkmann'schen Punkt (1, 2 3 4) gelten daher die Gleichungen:

$$\frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2}{\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_3}{\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_3} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_4}{\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_4} =$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_4}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4} = \frac{x_1 + x_3 + x_4}{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

Er liegt also auf der Linie

$$2) \qquad \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_4}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}$$

Der Punkt (2, 1 3 4) liegt auf derselben Linie. Aber auch die beiden Punkte (5, 6 3 4) und (6, 5 3 4) haben diese Eigenschaft, wie daraus folgt, dass man 2) mit Hilfe von 9) und 14) des § XIV auch die Form geben kann:

$$\frac{x_5 + x_6 + x_3}{\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_3} = \frac{x_5 + x_6 + x_4}{\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_4}$$

Die 6 dieser Linien, die man erhält, indem man die vier linearen Ausdrücke:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}; \quad \frac{x_1 + x_4 + x_6}{\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6}; \quad \frac{x_2 + x_3 + x_6}{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6}; \quad \frac{x_2 + x_4 + x_5}{\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5}$$

einander gleich setzt, schneiden sich in einem Punkt, den man auch erhält, indem man die drei linearen Ausdrücke

$$3) \qquad \frac{x_1 - x_2}{\alpha_1 - \alpha_2}; \quad \frac{x_3 - x_4}{\alpha_3 - \alpha_4}, \quad \frac{x_5 - x_6}{\alpha_5 - \alpha_6}$$

einander gleichsetzt.

Der Punkt 3) ist daher einer der 15 Punkte (1 2, 3 4, 5 6), die den 15 Linien [1 2, 3 4, 5 6] des vorigen Paragraphen entsprechen.

Die Linien 2) entsprechen den 45 Ecken der Dreiecke ∇_{12}, ∇_{13} . . . . des vorigen Paragraphen.

Die 15 Punkte 3) sind genau so gebildet, wie die 15 Punkte 1) des § XIII, nur dass die Functionen und Constanten jetzt den Gleichungen 9) und 14) des § XIV genügen müssen. Indessen sind diese Gleichungen für diese 15 Punkte durchaus unwesentlich, denn die Punkte 1) des § XIII ändern sich nicht, wenn man sämmtliche lineare Functionen um ein und dieselbe lineare Function und sämmtliche Constanten um ein und dieselbe Constante vermehrt. Diese Function und Constante kann man stets so wählen, dass dann den Gleichungen 9) und 14) des § XIV genügt wird. Indessen müssen diese Gleichungen bestehen, wenn die zugehörigen

Pascal'schen Linien und Kirkmann'schen Punkte (oder, wie wir eigentlich sagen müssen, Kirkmann'sche Linien und Brianchon-sche Punkte) Gleichungen von der Form 1) und 2) dieses Paragraphen haben sollen.

Der Punkt 3) liegt auf der Linie

$$\frac{x_1 - x_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{x_3 - x_4}{\alpha_3 - \alpha_4} \qquad 4)$$

welche durch den Cayley'schen Punkt (1 2 3 4) geht. Sie geht aber auch durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien

[1 3, 2 4, 5 6] und [1 4, 2 3, 5 6]

des vorigen Paragraphen, d. h. durch eine der 45 Ecken der Dreiecke ∇_{12}, ∇_{13} . . . . .

In gleicher Weise erhält man für den Durchschnittspunkt von [1 2, 3 4, 5 6] mit der Plücker'schen Linie [5 6] die Gleichungen

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_3 + x_4}{\alpha_3 + \alpha_4} = \frac{x_5}{\alpha_5} = \frac{x_6}{\alpha_6} \qquad 5)$$

Durch diesen Punkt geht daher auch die Linie

$$\frac{x_1 + x_2 + x_5}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5} = \frac{x_1 + x_2 + x_6}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6}$$

d. h. die Verbindungslinie des Punktes (1 3, 2 4, 5 6) mit dem Punkte (1 4, 2 3, 5 6).

Hierdurch ist der Zusammenhang der Figur der 15 Punkte dieses Paragraphen mit der der 15 Linien des vorhergehenden in der Weise hergestellt, dass, wenn die 15 Punkte gegeben sind, man die 15 Linien construiren kann und umgekehrt.

Denn wenn die 15 Punkte gegeben sind, so schneide man jede der Linien 2) dieses Paragraphen,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_5}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5} = \frac{x_1 + x_2 + x_6}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6}$$

mit einer gewissen Plücker'schen Linie ([5 6]), so erhält man einen der 45 Punkte 5)

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_3 + x_4}{\alpha_3 + \alpha_4} = \frac{x_5}{\alpha_5} = \frac{x_6}{\alpha_6}$$

Je drei dieser Punkte liegen auf einer Linie [1 2, 3 4, 5 6].

Sind aber umgekehrt die 15 Linien gegeben, so verbinde man jede der 45 Ecken der 15 Dreiecke ∇_{12}, ∇_{13} . . . mit einem bestimmten Cayley'schen Punkt. Die so erhaltenen 45 Linien 4) schneiden sich zu je drei in den 15 Punkten 3).

§ XVIII.

In diesem Paragraph will ich noch kurz den Fall besprechen, in welchem die 15 Linien in die 15 Verbindungslinien von sechs Punkten eines Kegelschnitts übergehen.

Man kann die 15 Linien [1 2, 3 4, 5 6] in 6 Gruppen zu je 5 bringen. So z. B. bilden die 5 Linien

1) [1 2, 3 4, 5 6], [1 6, 5 4, 3 2], [1 3, 4 6, 2 5], [1 5, 4 2, 3 6], [1 4, 2 6, 3 5]

eine Gruppe. Die übrigen 5 entstehen aus dieser durch Vertauschung der Indices. Je zwei Gruppen haben eine Linie gemeinsam.

Die Gruppe 1) möge mit Gruppe I, die aus I beziehungsweise durch die Transpositionen (1 2), (1 3), (1 4), (1 5), (1 6) hervorgehenden mit II, III, IV, V, VI bezeichnet werden.

Alsdann erhält man die 60 Combinationen des § XVI, wenn man die Gruppen I, II etc. in irgend einen Cyclus zusammenstellt, z. B.

(I, II, III, IV, V, VI)

und dann diejenigen 6 Linien wählt, welche I mit II, II mit III etc. und schliesslich VI mit I gemeinsam hat.

In dem hier zu betrachtenden Falle schneiden sich die fünf Linien jeder Gruppe in einem der 6 Kegelschnittpunkte. Ich will mich damit begnügen, die Bedingungen, unter welchen dies geschieht, hier anzugeben und ihre Richtigkeit rückwärts darzuthun; in meiner in Grunert's Archiv für Mathematik in diesem Jahre erscheinenden Doctordissertation sind sie direct abgeleitet worden.

Es sind dies ausser den in 9) und 14) des § XIV aufgestellten

$$2)\qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \equiv 0$$

$$3)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \equiv 0$$

Die folgenden

$$4)\qquad x_1 \alpha_1^2 + x_2 \alpha_2^2 + x_3 \alpha_3^2 + x_4 \alpha_4^2 + x_5 \alpha_5^2 + x_6 \alpha_6^2 \equiv 0$$

$$5)\qquad \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_4^3 + \alpha_5^3 + \alpha_6^3 = 0$$

Es genügt zu beweisen, dass irgend drei Linien der Gruppe I sich in einem Punkte schneiden, da dann die vierte und fünfte Linie durch denselben Punkt gehen müssen.

Die Gleichungen der drei Linien

[1 2, 3 4, 5 6], [1 6, 5 4, 3 2], [1 3, 4 6, 2 5]

kann man schreiben in der Form

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{x_6 + x_5}{\alpha_6 + \alpha_5}$$

$$\frac{x_2 + x_3}{\alpha_2 + \alpha_3} = \frac{x_5 + x_4}{\alpha_5 + \alpha_4}$$

$$\frac{x_3 + x_1}{\alpha_3 + \alpha_1} = \frac{x_4 + x_6}{\alpha_4 + \alpha_6}$$

Durch Addition erhält man hieraus die Gleichung

$$7) \quad \frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{x_2 + x_3}{\alpha_2 + \alpha_3} + \frac{x_3 + x_1}{\alpha_3 + \alpha_1} = \frac{x_4 + x_5}{\alpha_4 + \alpha_5} + \frac{x_5 + x_6}{\alpha_5 + \alpha_6} + \frac{x_6 + x_4}{\alpha_6 + \alpha_4}$$

Dieser Gleichung kann man die Form geben:

$$\frac{x_1 \alpha_1^2 + x_2 \alpha_2^2 + x_3 \alpha_3^2 - (x_1 + x_2 + x_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2}{\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3} =$$

$$\frac{x_4 \alpha_4^2 + x_5 \alpha_5^2 + x_6 \alpha_6^2 - (x_4 + x_5 + x_6)(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)^2}{\alpha_4^3 + \alpha_5^3 + \alpha_6^3 - (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)^3}$$

was nach 2), 3), 4), 5) eine Identität ist.

Der Durchschnittspunkt der drei Linien 6), den man naturgemäss mit I bezeichnen wird, liegt auf dem Kegelschnitt:

$$\frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \frac{x_2 + x_3}{\alpha_2 + \alpha_3} + \frac{x_2 + x_3}{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot \frac{x_3 + x_1}{\alpha_3 + \alpha_1} + \frac{x_3 + x_1}{\alpha_3 + \alpha_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} =$$

$$\frac{x_4 + x_5}{\alpha_4 + \alpha_5} \cdot \frac{x_5 + x_6}{\alpha_5 + \alpha_6} + \frac{x_5 + x_6}{\alpha_5 + \alpha_6} \cdot \frac{x_6 + x_4}{\alpha_6 + \alpha_4} + \frac{x_6 + x_4}{\alpha_6 + \alpha_4} \cdot \frac{x_4 + x_5}{\alpha_4 + \alpha_5}$$

Dieser Gleichung kann man nach einigen Transformationen mit Hilfe von 2), 3), 4), 5) die Form geben:

$$x_1^2 \beta_1 + x_2^2 \beta_2 + x_3^2 \beta_3 + x_4^2 \beta_4 + x_5^2 \beta_5 + x_6^2 \beta_6 = 0 \qquad 7)$$

Durch den Punkt I geht auch die Curve dritten Grades

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\ x_3 + x_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_3 + \alpha_1} = \frac{(x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4)}{(\alpha_4 + \alpha_5)(\alpha_5 + \alpha_6)(\alpha_6 + \alpha_4)}$$

oder

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) + (x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4) = 0$$

da der Nenner links + dem Nenner rechts = 0 ist.

Diese Gleichung geht aber mit Hilfe von 2) über in:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0 \qquad 8)$$

Genau so, wie man von dem Punkte I bewiesen hat, dass er auf dem Kegelschnitt 7) und der Curve dritten Grades 8) liegt,

kann man dies auch von den übrigen Punkten II, III, IV, V, VI beweisen; d. h. dieselben sind die sechs Durchschnittspunkte des Kegelschnitts 7) mit der Curve dritten Grades 8).

Der Kegelschnitt 7) ist übrigens für die aus den Plücker'schen Linien und Steiner'schen Punkten gebildete Figur ϱ einer von den im § II angeführten Kegelschnitten, woraus unmittelbar der Satz folgt, dass die conjugirten Steiner'schen Punkte conjugirte Pole in Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt 7) sind.

Man könnte nun muthmassen, dass, wenn die 15 Linien in die 15 Verbindungslinien von 6 Punkten übergehen, die 15 Punkte des § XVIII ebenfalls in die 15 Durchschnittspunkte von 6 Tangenten eines Kegelschnitts übergehen; dass dies nicht der Fall ist, kann man folgendermassen beweisen.

Die aus dem Steiner-Plücker'schen System ϱ und dem Cayley-Salmon'schen System τ gebildete Figur ξ ist gegeben durch:

9 a) $$\left\| \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & 0 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{matrix} \right\|$$

Aus den Gleichungen 2), 3), 4), 5) folgt, dass seine Darstellung in Liniencoordinaten folgende ist:

9 b) $$\left\| \begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6 & 0 \\ \alpha_1^2 - s, & \alpha_2^2 - s, & \alpha_3^2 - s, & \alpha_4^2 - s, & \alpha_5^2 - s, & \alpha_6^2 - s & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{matrix} \right\|$$

wobei

10) $$s = \frac{1}{6} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \alpha_6^2)$$

und $u_1, u_2 \ldots u_6$ den Gleichungen genügen:

11) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 + u_5 x_5 + u_6 x_6 \equiv u x + v y + w z$$

12) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 u_5 + u_6 \equiv 0$$

13) $$u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 + u_4 \alpha_4 + u_5 \alpha_5 + u_6 \alpha_6 \equiv 0$$

Die den Gleichungen 4) und 5) aus den Functionen und Constanten des Systems 9a) gebildet entsprechenden des Systems 9b) sind die folgenden

$$u_1 (\alpha_1^2 - s)^2 + u_2 (\alpha_2^2 - s)^2 + \ldots\ldots \equiv 0$$

$$(\alpha_1^2 - s)^3 + (\alpha_2^2 - s)^3 + \ldots = 0$$

Gleichungen, die aus den Gleichungen 12) bis 15) und 2) bis 5) nicht folgen, die daher auch nicht erfüllt sind.

Dann aber sind auch die 15 Punkte nicht die Schnittpunkte von 6 Tangenten eines Kegelschnitts, sondern sie bilden eine allgemeinere Figur des § XVI.

§ XIX.

Für weitere Untersuchungen wird es sich empfehlen, von den in § XVI und § XVII aufgestellten Figuren von 15 Punkten und von 15 geraden Linien auszugehen; und zwar aus dem Grunde, weil für dieselben die Reciprocität eine vollständige ist und zwischen den Constanten und Functionen Gleichungen stattfinden, die in Bezug auf alle diese Grössen linear sind, was für den speciellen Fall des § XVIII nicht mehr gilt.

Von den in § XVIII aufgestellten Linien sind eine Anzahl von Eigenschaften angegeben. Trotzdem glaube ich, dass es eine noch einfachere Darstellung der aus denselben gebildeten Figur durch gewisse andere 6 Functionen und Constanten giebt, als die in unseren Entwickelungen benutzten, die allerdings die Eigenschaften der Pascal'schen Linien in der klarsten Weise an das Licht bringen, die aber nicht so sehr geeignet scheinen, eben solche Klarheit über die 15 Linien zu geben. Es wird diese Vermuthung unterstützt durch die Thatsache, dass, wenn die 15 Linien in die 15 Verbindungslinien von 6 Punkten eines Kegelschnitts übergehen, dieselbe ihre Bestätigung findet, wie aus der auf Seite 34 bezeichneten Arbeit zu ersehen ist, wo ich auf die in dieser Abhandlung gegebene Darstellung direct geführt worden bin.

Eine der wichtigsten zu erledigenden Fragen ist Folgende:

Wenn die 15 Linien in die Verbindungslinien von 6 Punkten (I, II, III, IV, V, VI) eines Kegelschnitts übergehen, so erhält man durch Polarisation in Bezug auf diesen Kegelschnitt 6 Tangenten. Diese Polarisation kann man durch folgende Construction ausführen. Ist I II die Verbindungslinie von I mit II, so sind die drei Punkte

(I II, III IV); (I III, II IV); (I IV, II III)

conjugirte Pole in Bezug auf den Kegelschnitt, ihre Verbindungslinien also die Polaren dieser drei Punkte.

Aus diesen 45 Linien erhält man dann ohne Weiteres die 6 Tangenten.

Wendet man diese Construction auf die allgemeinere Figur von

15 Linien an, so erhält man ebenso 45 Linien. Erhält man aus diesen 45 Linien eine allgemeinere Figur von 15 Punkten, wie man im speciellen Falle die 15 Schnittpunkte von 6 Tangenten eines Kegelschnitts erhält?

Verfasser hofft diese Frage in kurzer Zeit erledigt zu haben.

Wenn die aus den 15 Linien gebildete Figur vollständig klargestellt ist, so bleiben noch diejenigen Eigenschaften der speciellen Figur des § XVIII nachzuweisen, die sie vor der allgemeinen voraus hat. Namentlich sind es die folgenden beiden Fragen, deren Beantwortung zum Abschluss der Theorie nothwendig sind.

Welche speciellen Eigenschaften hat die specielle Steiner-Plücker'sche Figur des § XVIII?

Welche speciellen Eigenschaften hat die specielle Cayley-Salmon'sche Figur des § XVIII?

Druck von Trowitzsch und Sohn in Berlin.

